TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM XẤP XỈ BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Lâm Quốc Anh[1], Nguyễn Hữu Danh[2*] và Trần Ngọc Tâm[3]
[1]Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ
[2]Khoa Cơ bản, Đại học Tây Đô
[3]Trường Đại học Ngân hàng Tp Hồ Chí Minh
(Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

Ngày nhận: *06/9/2019*
Ngày phản biện: *20/9/2019*
Ngày duyệt đăng: *03/10/2019*

TÓM TẮT

Tính ổn định nghiệm của các bài toán trong tối ưu theo nghĩa tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm là một chủ đề rất quan trọng. Chủ đề này đã nhận được rất nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong gần mười mấy năm qua. Gần đây, trong các bài báo Anh et al., (2012) và Li et al., (2012), các tác giả đã sử dụng các giả thiết về tính lồi/lõm để đạt được tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng phụ thuộc tham số trong không gian định chuẩn. Các kết quả này đã mở ra bước ngoặc mới trong chủ đề nghiên cứu vì chúng đã cung cấp các điều kiện đủ cho tính chất Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm mà ở đó tập nghiệm không là tập đơn phần tử. Mục đích của nghiên cứu nhằm tiếp tục cải tiến các kết quả nghiên cứu trước đây. Mặt khác, chúng tôi muốn giảm nhẹ các điều kiện về tính lồi/lõm trong các kết quả trên mà vẫn đạt được tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng phụ thuộc tham số. Cụ thể, các kết luận của Định lý 2.1 trong Anh et al., (2012) và Định lý 2.3 trong Li et al., (2012) vẫn đúng với các giả thiết lồi/lõm giảm nhẹ mà chúng tôi đề xuất trong bài báo này. Ở đây, chúng tôi đưa ra các ví dụ cho thấy các giả thiết của chúng tôi yếu thực sự so với các điều kiện đã sử dụng trong các bài báo đã đề cập. Hơn nữa, một ví dụ ở cuối bài báo chứng tỏ rằng kết quả chính của bài báo này là một sự cải tiến rất có ý nghĩa trong chủ đề đang xét.

Từ khóa: *Bài toán cân bằng, liên tục Hölder, liên tục Lipschitz, tính tựa lõm, nghiệm xấp xỉ*

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Nguyễn Hữu Danh và Trần Ngọc Tâm, 2019. Tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng. Tạp chí Nghiên cứu khoa học và Phát triển kinh tế Trường Đại học Tây Đô. 07: 185-194

**Ths.Nguyễn Hữu Danh – Giảng viên Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*

1. GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng (EP) có một vị trí quan trọng trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Mô hình của (EP) rất đơn giản nhưng nó chứa nhiều bài toán tối ưu quan trọng có liên quan, ví dụ như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm bất động,…Mô hình của bài toán này lần đầu tiên được nghiên cứu bởi H. Nikaido và K. Isoda (Nikaido and Isoda, 1955) dưới dạng bài toán mở rộng của trò chơi không hợp tác. Nhà toán học Ky Fan là người có những đóng góp chính đầu tiên cho bài toán cân bằng. Các kết quả về điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng của Ky Fan là nền tảng cho hầu hết các kết quả về lý thuyết tối ưu sau này. Do đó, bài toán cân bằng vẫn thường được gọi là bất đẳng thức Ky Fan (Fan, 1972). Tuy nhiên, bài toán cân bằng chỉ thực sự được nghiên cứu rộng rãi ngay sau khi sự xuất bản công trình của hai nhà toán học Blum và Oettli (Blum and Oettli, 1994). Đã có nhiều công trình nghiên cứu về các điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán này và các dạng mở rộng của nó (Castllani *et al.*, 2010; Giannessi, 2000; Hai and Khanh, 2007; Hai *et al.*, 2009; Sadequi and Alizadeh, 2011 và các tài liệu tham khảo trong đó). Chủ đề nghiên cứu sự ổn định của nghiệm bao gồm tính nửa liên tục, liên tục theo nghĩa Berge/Hausdorff và theo nghĩa Hölder /Lipschitz cũng là một động lực cho nhiều nhà nghiên cứu (Ait Mansour and Riahi, 2005; Anh and Khanh, 2007; Bianchi and Pini, 2003; Huang *et al.,* 2006; Kimura and Yao, 2008 và các tài liệu tham khảo trong đó).

Để ý rằng hầu hết các kết quả trước đây về tính liên tục Hölder /Lispchitz của ánh xạ nghiệm thì các giả thiết được đặt ra đều liên quan đến tính đơn điệu mạnh/lồi mạnh, và do đó tập nghiệm của bài toán là duy nhất trong lân cận của điểm đang xét. Điều này rất khó áp dụng vào các bài toán thực tế, ví dụ như bài toán hai mức. Do đó, đã có nhiều công trình cố gắng khắc phục nhược điểm này. Trong (Li *et al.*, 2009; Li *et al.,* 2011), các giả thiết liên quan đến tập nghiệm đã được nghiên cứu. Tuy nhiên, giả thiết này rất khó kiểm tra bởi vì khi ta nghiên cứu tính ổn định thì tập nghiệm của bài toán hầu như ta không biết. Trong (Anh *et al*., 2012; Li *et al.,* 2012), các điều kiện đủ được sử dụng cho tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ trong trường hợp tập nghiệm không duy nhất.

Mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng. Các kết quả đạt được đã cải thiện được các kết quả trong các công trình (Anh *et al.,* 2012; Li *et al.,* 2012). Nói cách khác, các kết quả trong (Anh *et al*., 2012; Li *et al.,* 2012) vẫn đúng với các giả thiết giảm nhẹ hơn. Đây là sự cải tiến rất có ý nghĩa.

Phần còn lại của bài báo được trình bày như sau. Mục 2 giới thiệu bài toán cân bằng vô hướng và nhắc lại các khái niệm cần thiết cho phần sau. Trong Mục 3, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ. Cuối cùng, Mục 4 là phần kết luận.

2. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng $||\cdot||$ để ký hiệu chuẩn trong không gian định chuẩn bất kỳ (nếu không gây nhầm lẫn) và $\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực không âm. Đường kính của A được ký hiệu là diam $A := \sup_{x,x'\in A} \big||x - x'|\big|$.

Từ đây, nếu không có giả thiết gì thêm thì X, Λ và M là các không gian định chuẩn. Cho $D \subset X$ là tập con lồi, khác rỗng, $C \subset Y$ là nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng, $K: \Lambda \rightrightarrows D$ là một ánh xạ đa trị có giá trị lồi, bị chặn và $f: X \times X \times M \to \mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực. Ta xét bài toán cân bằng như sau:

(EP) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho $f(\bar{x}, y, \mu) \geq 0 \; \forall \, y \in K(\lambda)$.

Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết cho các phần tiếp theo.

Cho hai tập con A và B của X, khoảng cách Hausdorff của A và B được định nghĩa bởi

$$H(A,B) := \max\{\text{ex}(A,B), \text{ex}(B,A)\}$$

trong đó $\text{ex}(A,B) := \sup_{a\in A} d(a,B) \in A$ và $d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y)$ là khoảng cách từ x đến A.

Định nghĩa 2.1 (Bigi *et al*., 2019) Một hàm số $f: X \to \mathbb{R}$ được gọi là *lồi* trên một tập lồi $A \subset X$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $t \in [0,1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (1)$$

(1)

và f được gọi là *lõm* nếu (1) được thay bởi

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Định nghĩa 2.2 (Anh *et al*., 2015) Cho $K: \Lambda \rightrightarrows D$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó, K được gọi là $l.\alpha$-liên tục Hölder tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu tồn tại một lân cận N của $\bar{\lambda}$ sao cho

$$H\big(K(\lambda_1), K(\lambda_2)\big) \leq l\|\lambda_1 - \lambda_2\|^\alpha,$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in N$.

Định nghĩa 2.3 (Anh *et al*., 2012) Cho $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó, f được gọi là $l.\alpha$- liên tục Hölder tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq l\|x_1 - x_2\|^\alpha,$$

$\forall x_1, x_2 \in U$.

Định nghĩa 2.4 Cho $f: X \times X \times X \to \mathbb{R}$. Khi đó, f được gọi là $(l_1.\alpha_1, l_2.\alpha_2, l_3.\alpha_3)$- liên tục Hölder tại $(x_0, y_0, z_0) \in X \times X \times X$ nếu tồn tại một lân cận $N_1 \times N_2 \times N_3$ của (x_0, y_0, z_0) sao cho

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leq l_1\|x_1 - x_2\|^{\alpha_1} + l_2\|y_1 - y_2\|^{\alpha_2} + l_3\|z_1 - z_2\|^{\alpha_3},$$
$$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in N_1 \times N_2 \times N_3.$$

Trong trường hợp bậc Hölder bằng 1 thì tính liên tục Hölder được gọi là liên tục Lipschitz.

Ta nói rằng một hàm số thỏa mãn một tính chất nhất định trên một tập con D nếu nó thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm trên D.

Tiếp theo, chúng tôi đề xuất một khái niệm tổng quát liên quan đến tính tựa lõm và nghiên cứu một số tính chất cần thiết trong phần tiếp theo.

Định nghĩa 2.5 Cho $A \subset X$ là một tập con lồi, khác rỗng và $\varphi: A \to \mathbb{R}$ là hàm giá trị thực. Khi đó, φ được gọi là 0-mức dưới tựa lõm trên A nếu với mỗi $x_1, x_2 \in A$, $\lambda \in [0,1]$ và $\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < 0$ thì hoặc $\varphi(x_1) < 0$ hoặc $\varphi(x_2) < 0$.

Chú ý 2.1 Nếu φ là hàm tựa lõm trên A, nghĩa là, $\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}$ với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $\lambda \in [0,1]$ thì φ là 0-mức dưới tựa lõm trên A.

Bổ đề 2.1 Cho φ, A như trong Định nghĩa 2.5. Ba điều kiện sau đây là tương đương nhau

(a) φ là 0-mức dưới tựa lõm trên A.

(b) Với mỗi tập con hữu hạn $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ và $x \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ với $\varphi(x) < 0$ thì tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\varphi(x_i) < 0$, trong đó $\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là bao lồi của $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, nghĩa là, $\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x \in X \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$.

(c) $\mathbb{A} := \{x \in A \mid \varphi(x) \geq 0\}$ là tập lồi.

Chứng minh

(a) ⇒ (b) Được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của φ.

(b) ⇒ (c) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ và $t \in [0,1]$, ta có $\varphi(x_1) \geq 0$ và $\varphi(x_2) \geq 0$. Nếu $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) < 0$ thì hoặc $\varphi(x_1) < 0$ hoặc $\varphi(x_2) < 0$, điều này mâu thuẩn với ở trên. Vì vậy, $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \geq 0$ do đó $\mathbb{A}$ là tập lồi.

(c) ⇒ (a) Giả sử φ không là 0-mức dưới tựa lõm trên A. Khi đó, tồn tại $x_1, x_2 \in A$ và $t \in [0,1]$, với $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) < 0$, ta có $\varphi(x_1) \geq 0$ và $\varphi(x_2) \geq 0$. Do đó, $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, vì $\mathbb{A}$ lồi nên ta được $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \geq 0$, điều này là mâu thuẩn. Vì vậy, φ là 0-mức dưới tựa lõm trên A. □

□

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng chiều ngược lại của Chú ý 2.1 nói chung không đúng.

Ví dụ 2.1 Cho $A = \mathbb{R}$ và $\varphi: A \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\varphi(x) = 1 + |x|$ với mọi $x \in A$. Khi đó, tập hợp $\{x \in A \mid \varphi(x) \geq 0\} \equiv \mathbb{R}$, và do đó tập hợp này lồi. Áp dụng Bổ đề 2.1 ta được φ là 0-mức dưới tựa lõm trên A. Tuy nhiên, với $x_1 = -1, x_2 = 1 \in A$ và $\lambda = \frac{1}{2}$, ta có $\min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\} = 2$ trong khi $\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1$, vì vậy φ không tựa lõm trên A.

3. TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM XẤP XỈ

Với $(\varepsilon, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \Lambda \times M$, ta ký hiệu tập nghiệm xấp xỉ của (EP) là $S(\varepsilon, \lambda, \mu)$, nghĩa là

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) := \{x \in K(\lambda) \mid f(x, y, \mu) + \varepsilon \geq 0 \;\forall\, y \in K(\lambda)\}.$$

Định lý 3.1 Xét (EP), giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn

(i) K là $m.\alpha$-liên tục Hölder trên Λ;

(ii) với mỗi $y \in K(\lambda)$ và $\mu \in M$, ánh xạ $(x, \varepsilon) \longmapsto f(x, y, \mu) + \varepsilon$ là 0-mức dưới tựa lõm trên $K(\Lambda) \times (0, +\infty)$;

(iii) f là $(l_1.\alpha_1, l_2.\alpha_2, h.\beta)$-liên tục Hölder trên $K(\Lambda) \times K(\Lambda) \times M$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm S liên tục Hölder trên $(0,+\infty) \times \Lambda \times M$.

Chứng minh

Cho tùy ý $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) \in (0,+\infty) \times \Lambda \times M$, khi đó, tồn tại $\bar{\varepsilon}_0$ với $0 < \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_0$

Bước 1. Do (i), tồn tại một lân cận N của λ_0 thỏa mãn

$$K(\lambda) \subset K(\lambda_0) + m\mathbb{B}(0, \|\lambda - \lambda_0\|^{\alpha}) \ \forall \lambda \in N$$

và do đó, $\operatorname{diam} K(\lambda) \le \rho := \operatorname{diam} K(\lambda_0) + 2m\big(\operatorname{diam}(N)\big)^{\alpha}$.

Ta ước lượng

$H(S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1))$ trong đó $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [\bar{\varepsilon}_0, +\infty), \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ và $(\lambda_1, \mu_1) \in \Lambda \times M$. Vì $S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)$, nên ta có

$$\operatorname{ex}\big(S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)\big) = 0. \quad (2)$$
(2)

Với mỗi $x_2 \in S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), x_0 \in S(0, \lambda_1, \mu_1)$ và $y \in K(\lambda)$, ta có

$f(x_2, y, \mu) + \varepsilon_2 \ge 0, f(x_0, y, \mu) \ge 0$, nghĩa là

$$(x_2, \varepsilon_2), (x_0, 0) \in L := \{(x, \varepsilon) \mid f(x, y, \mu) + \varepsilon \ge 0\}.$$

Do (ii) và Bổ đề 2.1, ta được L là tập lồi, suy ra

$$(x_1, \varepsilon_1) := \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}(x_0, 0) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(x_2, \varepsilon_2) \in L.$$

Nghĩa là, $f(x_1, y, \mu) + \varepsilon_1 \ge 0$, suy ra $x_1 \in S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1)$. Khi đó,

$$\|x_2 - x_1\| = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\|x_2 - x_0\| \le \frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|.$$

Vì vậy,

$$\operatorname{ex}\big(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1)\big) \le \frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| := k_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|. \quad (3)$$
(3)

Từ (2) và (3), suy ra $H\big(S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)\big) \le k_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$.

Bước 2. Giả thiết (iii) chỉ ra sự tồn tại một lân cận U của μ_0 sao cho với mọi $x, y \in K(N)$ và $\mu_1, \mu_2 \in U$,

$$|f(x, y, \mu_1) - f(\bar{x}, y, \mu_2)| \le h\|\mu_1 - \mu_2\|^{\beta}. \quad (4)$$
(4)

Ta ước lượng cho

$H(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2))$ với $\varepsilon_2 \in [\bar{\varepsilon}_0, +\infty), \lambda_1 \in N$ và $\mu_1, \mu_2 \in U, \mu_1 \neq \mu_2$. Ta có hai trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $\|\mu_1 - \mu_2\|^{\beta} \le \frac{\varepsilon_2}{h}$, thì $0 < s := h\|\mu_1 - \mu_2\|^{\beta} \le \varepsilon_2$.

Ta cần chứng minh $S(\varepsilon_2 - s, \lambda_1, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)$. Thật vậy, lấy $\bar{x} \in S(\varepsilon_2 - s, \lambda_1, \mu_1)$, thì với mọi $y \in K(\lambda_1), f(\bar{x}, y, \mu_2) + f(\bar{x}, y, \mu_1) - f(\bar{x}, y, \mu_2) + \varepsilon_2 - s \ge 0$. Kết hợp điều này với (4), ta được $f(\bar{x}, y, \mu_2) + \varepsilon_2 \ge 0$ với mọi $y \in K(\lambda_1)$, nghĩa là $\bar{x} \in S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)$. Sử dụng kết quả của Bước 1, ta có

$$\operatorname{ex}\big(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)\big) \le \operatorname{ex}\big(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2 - s, \lambda_1, \mu_1)\big) \le H(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2 - s, \lambda_1, \mu_1)) \le \frac{\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1 - \mu_2\|^{\beta}.$$

Tương tự, $\text{ex}\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1)\big) \le \frac{\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta}$.

Do đó, $H\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1),S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta} \coloneqq k_2\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta}$ (5)

Trường hợp 2. Nếu $\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta} > \frac{\varepsilon_2}{h}$ thì tồn tại một số tự nhiên n_0 thỏa mãn $\frac{diamU}{n_0} \le \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{h}\right)^{1/\beta}$. Gọi P là một phân hoạch của đoạn $[\mu_1,\mu_2]$ với n_0+1 nút $z_1,\dots,z_{n_0+1}$ sao cho $z_1=\mu_1, z_{n_0+1}=\mu_2, \|z_i-z_{i+1}\| = \frac{\|\mu_1-\mu_2\|}{n_0}$. Khi đó, $\|z_i - z_{i+1}\| \le \frac{\theta}{n_0} \le \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{h}\right)^{1/\beta}$, với $\theta \coloneqq \text{diam}U$. Vì vậy, $\|z_i-z_{i+1}\|^{\beta} \le \frac{\bar{\varepsilon}_0}{h} \le \frac{\varepsilon_2}{h}$. Từ (5), ta có

$$\begin{aligned} H\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1),S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)\big) &\le \frac{\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\sum_{i=1}^{n_0}\|z_i-z_{i+1}\|^{\beta} \\ &\le \frac{n_0\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\frac{\varepsilon_2}{h} \le \frac{n_0\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta} \\ &\coloneqq k_2\|\mu_1-\mu_2\|^{\beta}. \end{aligned}$$

Bước 3. Lấy $\varepsilon_2 \in [\bar{\varepsilon}_0,+\infty), \mu_2 \in U$ và $\lambda_1,\lambda_2 \in N'$, trong đó $N' \subset N$ là một lân cận của λ_0 với diam$N' \le \frac{1}{2}$. Ta ước lượng $H\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),S(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big)$ với $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Đặt $\eta \coloneqq \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_0$ và $\delta \coloneqq (l_1m^{\alpha_1} + l_2m^{\alpha_2})\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha_3}$ trong đó $\alpha_3 \coloneqq \min\{\alpha,\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2\}$, ta cũng có hai trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $\delta \le \eta$ thì $\varepsilon_2 - \delta \ge \varepsilon_2 - \eta = \bar{\varepsilon}$. Với mọi $x_1 \in S(\varepsilon_2 - \delta,\lambda_1,\mu_2)$ thì $x_1 \in K(\lambda_1)$ và $f(x_1,y,\mu_2)+\varepsilon_2-\delta \ge 0$ với mọi $y \in K(\lambda_1)$. Do (i), tồn tại $x_2 \in K(\lambda_2)$ sao cho $\|x_1-x_2\| \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha}$. Với mỗi $y_2 \in K(\lambda_2)$, cũng do (i), tồn tại $y_1 \in K(\lambda_1)$ thỏa mãn $\|y_1-y_2\| \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha}$. Vì $y_1 \in K(\lambda_1)$, ta có

$$\begin{aligned} f(x_2,y_2,\mu_2) + f(x_1,y_1,\mu_2) \\ - f(x_2,y_2,\mu_2) + \varepsilon_2 - \delta \\ \ge 0. \end{aligned}$$

Do (iii), ta được

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1,\mu_2) - f(x_2,y_2,\mu_2)| \\ \le l_1\|x_1-x_2\|^{\alpha_1} \\ + l_2\|y_1-y_2\|^{\alpha_2} \\ \le l_1m^{\alpha_1}\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha\alpha_1} \\ + l_2m^{\alpha_2}\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha\alpha_2} \le \delta. \end{aligned}$$

Vì vậy, $f(x_2,y_2,\mu_2)+\varepsilon_2 \ge 0$, nghĩa là $x_2 \in S(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)$.

Với mỗi $x_0 \in S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)$ và $x_1 \in S(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)$, ta có

$$\begin{aligned} d\big(x_0,S(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) &\le \|x_2-x_0\| \\ &\le \|x_2-x_1\| + \|x_1-x_0\| \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} + \|x_1-x_0\|. \end{aligned}$$

Vì x_1 là tùy ý, ta được

$d\big(x_0,S(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} + d\big(x_0,S(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\big)$, suy ra

$$\begin{aligned} &\text{ex}\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),S(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} \\ &+\text{ex}\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),S(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\big) \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} \\ &+H\big(S(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),S(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\big) \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} + \frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}|\delta| \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha} \\ &+\frac{\rho(l_1m^{\alpha_1}+l_2m^{\alpha_2})}{\bar{\varepsilon}_0}\|\lambda_1-\lambda_2\|^{\alpha_3} \end{aligned}$$

$$\leq \left(m + \frac{\rho(l_1 m^{\alpha_1} + l_2 m^{\alpha_2})}{\bar{\varepsilon}_0}\right) \|\lambda_1 - \lambda_2\|^{\alpha_3}.$$

Trường hợp 2. Nếu $\delta > \eta$ thì tồn tại một số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{\delta}{n} \leq \eta$. Gọi P' là một phân hoạch của đoạn $[\lambda_1, \lambda_2]$ với $n+1$ nút $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ trong đó $u_1 = \lambda_1, u_{n+1} = \lambda_2, \|u_1 - u_{n+1}\| = \frac{\|\lambda_1 - \lambda_2\|}{n}$. Khi đó, $\|u_1 - u_{n+1}\|^{\alpha_3} \leq \frac{\|\lambda_1 - \lambda_2\|^{\alpha_3}}{n} \leq \frac{\eta}{l_1 m^{\alpha_1} + l_2 m^{\alpha_2}}$, nghĩa là $(l_1 m^{\alpha_1} + l_2 m^{\alpha_2})\|u_1 - u_{n+1}\|^{\alpha_3} \leq \eta$. Áp dụng kết quả của Trường hợp 1, ta được

$$\begin{aligned} &H(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2), S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} H(S(\varepsilon_2, u_i, \mu_2), S(\varepsilon_2, u_{i+1}, \mu_2)) \\ &\leq n\left(m + \frac{\rho(l_1 m^{\alpha_1} + l_2 m^{\alpha_2})}{\bar{\varepsilon}_0}\right)\|u_i - u_{i+1}\|^{\alpha_3} \\ &\leq \left(m + \frac{\rho(l_1 m^{\alpha_1} + l_2 m^{\alpha_2})}{\bar{\varepsilon}_0}\right) n^{1-\alpha_3}\|\lambda_1 - \lambda_2\|^{\alpha_3} := k_3\|\lambda_1 - \lambda_2\|^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Bước 4. Ta có

$$\begin{aligned} &H(S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)) \\ &\leq H(S(\varepsilon_1, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)) \\ &+ H(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)) \\ &+ H(S(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2), S(\varepsilon_2, \lambda_2, \mu_2)) \\ &\leq k_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + k_2\|\mu_1 - \mu_2\|^{\beta} + k_3\|\lambda_1 - \lambda_2\|^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Chứng minh kết thúc. □

Chú ý 3.1 Theo Bổ đề 2.1, tính 0-mức dưới tựa lõm trong giả thiết (ii) yếu hơn thực sự so với tính lõm của hàm mục tiêu trong các bài báo (Anh *et al.,* 2012; Li *et al.,* 2012). Vì vậy Định lý 3.1 là một cải tiến của các kết quả chính trong các công trình được đề cập ở trên.

Ví dụ sau đây cho thấy kết quả trong Định lý 3.1 thì được nghiệm đúng nhưng các kết quả trong (Anh *et al.,* 2012; Li *et al.,* 2012) thì không sử dụng được.

Ví dụ 3.1 Cho $D = \mathbb{R}, \Lambda = M = [0,1], K(\lambda) = [0, \lambda]$ và $f(x, \mu) = x^2 + \mu$. Khi đó tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 được thỏa mãn. Tập nghiệm xấp xỉ $S(\mu) = [0, \lambda]$ liên tục Hölder. Tuy nhiên, các kết quả trong (Anh *et al.,* 2012; Li *et al.,* 2012) không sử dụng được vì hàm f không lõm theo biến thứ nhất.

Hệ quả sau đây liên quan đến tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm được suy ra trực tiếp từ Định lý 3.1.

Hệ quả 3.1 Cho (EP), giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) K liên tục Lipschitz trên Λ;

(ii) với mỗi $y \in K(\lambda)$ và $\mu \in M$, $(x, \varepsilon) \mapsto f(x, y, \mu) + \varepsilon$ là 0-mức dưới tựa lõm trên $K(\Lambda) \times (0, +\infty)$;

(iii) f liên tục Lipschitz trên $K(\Lambda) \times K(\Lambda) \times M$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm S liên tục Lipschitz trên $(0, +\infty) \times \Lambda \times M$.

Chú ý 3.2 Hệ quả 3.1 đã tổng quát và cải thiện nhiều kết quả quan trọng về tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán cân bằng (xem Định lí 2.3, Li *et al.*, 2012 và Định lí 2.1, Anh *et al.*, 2012).

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết về tính mức dưới tựa lõm, chúng tôi đã thành công trong việc thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm, đáp ứng mục tiêu đã đặt ra. Các kết quả đạt được rất có ý nghĩa trong toán học ứng dụng. Bên cạnh đó các kết quả trong bài báo có thể được mở rộng nghiên cứu cho các bài toán quan trọng trong tối ưu như bài toán tựa cân bằng, bài toán cân bằng vectơ,…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ait Mansour, M. and Riahi, H., 2005. Sensitivity analysis for abstract equilibrium problems. J. Math. Anal. Appl. 306: 684-691.
2. Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2007. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. J. Optim. Theory Appl. 135: 271-284.
3. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., 2012. On Hölder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 75: 2293-2303.
4. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., 2015. On Hölder continuity of solution maps of parametric primal and dual Ky Fan inequalities. TOP. 23: 151-167.
5. Bianchi, M. and Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. Operations Research Letters 31: 445-450.
6. Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M., 2019. Nonlinear Programming Techniques for Equilibria. Springer Nature Switzerland AG.
7. Blum, E. and Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. Math. Student. 63: 123-145.
8. Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando M., 2010. Existence results for nonconvex equilibrium problems. Optim. Math. Soft. 25: 49-58.
9. Fan, K., 1972. A minimax inequality and applications. In: Shisha, O. (ed.) Inequality III. Academic Press, New York, 103-113.
10. Giannessi (ed), F., 2000. Vector variational inequalities and vector equilibria, Mathematical Theories. Nonconvex Optimization and Its Application 38.
11. Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007. Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications. J. Optim. Theory Appl. 133: 317-327.
12. Hai, N.X., Khanh, P.Q., Quan, N.H., 2009. On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems. J. Glob. Optim. 45: 565-581.
13. Huang, N.J., Li, J., Thompson, H.B., 2006. Stability for parametric implicit vector equilibrium problems. Math. Comput. Modelling 43: 1267-1274.
14. Kimura, K. and Yao, J.C., 2008. Semicontinuity of solution mappings of parametric generalized vector equilibrium problems. J. Optim. Theory Appl. 138: 429-443.
15. Li, X.B., Li, S.J., Wang, L.N., Teo, K.L., 2009. The Hölder continuity of solutions to generalized vector

equilibrium problems. European Journal of Operational Research 199: 334-338.

16. Li, X.B., Li, S.J., Chen, C.R., Teo, K.L., 2011. Hölder continuity and upper estimates of solutions to vector quasiequilibrium problems. European Journal of Operational Research 210: 148-157.

17. Li, X.B., Li, S.J., Chen, C.R., 2012. Lipschitz continuity of an approximate solution mapping to equilibrium problems, Taiwan. J. Math. 16: 1027-1040.

18. Nikaido, H. and Isoda, K., 1955. Note on non-copperative convex games. Pacific Journal of Mathematics 5: 807-815.

19. Sadequi and Alizadeh, C.G., 2011. Existence of solutions of generalized vector equilibrium problems in reflexive Banach spaces. Nonlinear Anal. 74: 2226-2234.

HÖLDER CONTINUITY FOR APPROXIMATE SOLUTION MAPPINGS TO EQUILIBRIUM PROBLEMS

Lam Quoc Anh[1], Nguyen Huu Danh[2] and Tran Ngoc Tam[3]
[1]School of Education, Can Tho University,
[2]Faculty of Basic Sciences, Tay Do University
[3]Banking University of Ho Chi Minh City
(Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

ABSTRACT

The stability for optimization-related problems in the sense of Hölder/Lipschitz continuity of solution mappings is a very important topic. This topic has received much attention of mathematicians for the last ten years. Recently, in Anh et al. (2012) and Li et al. (2012), the Hölder/Lipschitz continuity of approximate solution mappings to parametric equilibrium problems is obtained under the key assumptions of the convexity/concavity in normed spaces. These results disclosed a new turning point in the topic because they provided sufficient conditions for the Hölder/Lipschitz continuity of the solution mappings where the solutions were not unique. Our aim in this paper is to improve the results in the papers above. In other words, we want to relax the convexity/concavity conditions in the above results to the weaker one whereas Hölder/Lipschitz continuity for approximate solution mappings to the parametric equilibrium problems is also archived. Namely, the conclusions of Theorem 2.1 in Anh et al. (2012) and Theorem 2.3 in Li et al. (2012) are still valid under slight convexity/concavity assumptions proposed in this paper. Here, we provide examples to show that our assumptions are really weaker than the conditions used in the papers mentioned. Moreover, an example at the end of this paper illustrates that the main results of the paper is a significant improvement in the subject.

Keywords: *Equilibrium problems, Hölder continuity, Lipschitz continuity, quasiconcavity, approximate solutions.*